

Dans cette séance on va voir

- (1) déf. de matrice et de matrice augmentée associée à un SFL
- (2) déf de coeff. principal d'une ligne d'un SFL
- (3) déf de matrice échelonnée et de matrice échelonnée réduite;
- (4) déf d'OFL pour une matrice / matrice augmentée et matrices ligne-équivalentes (ou équivalentes)
- (5) méthode de Gauss-Jordan

Déf. 1.18 | É. L. ou SEL

on définit

(1) matrice associée à (\*) :

→ tableau rectangulaire

$\left. \begin{array}{l} m \\ \text{lignes} \\ \text{"} \\ \text{\# eq.} \end{array} \right\}$

$$(*) \begin{cases} a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + \dots + a_{m,n}x_n = b_m \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

← coeff. de (\*)

n colonnes = # variables

(2) matrice augmentée associée à (\*) :

$$\left( \begin{array}{ccc|c} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & \dots & a_{m,n} & b_m \end{array} \right)$$

second membre ↑

Pourquoi?

→ Pour écrire moins !!

SFL = matrice augmentée

(i.e. les SFL et les matrices augmentées ont la même information)

Déf. 1.13 \* (pour matrices augmentées ou non augmentées)

Toutes les déf d'OFL pour les SFL s'appliquent aussi à des matrices (augmentées)

De même, deux matrices (augmentées) sont

dites ligne-équivalentes (parfois, seulement équivalentes)  
si l'on peut obtenir une à partir d'une suite linéaire  
d'OEFL sur l'autre.

Exemple 1.17 (suite) Le SEFL donné à

la matrice augmentée :

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & 4 & 1 \\ 6 & 12 & 6 & 0 \\ -2 & -2 & -7 & 5 \end{array} \right)$$

$$L_2 \leftarrow \frac{1}{6} \cdot L_2 \longrightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & -7 & 5 \end{array} \right) \xrightarrow{\dots} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 27/3 \\ 0 & 1 & 0 & -10/3 \\ 0 & 0 & 1 & -7/3 \end{array} \right)$$

OEFL

Déf 1.20 Si:  $A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & \dots & A_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m,1} & \dots & A_{m,n} \end{pmatrix}$  }  $m$  lignes

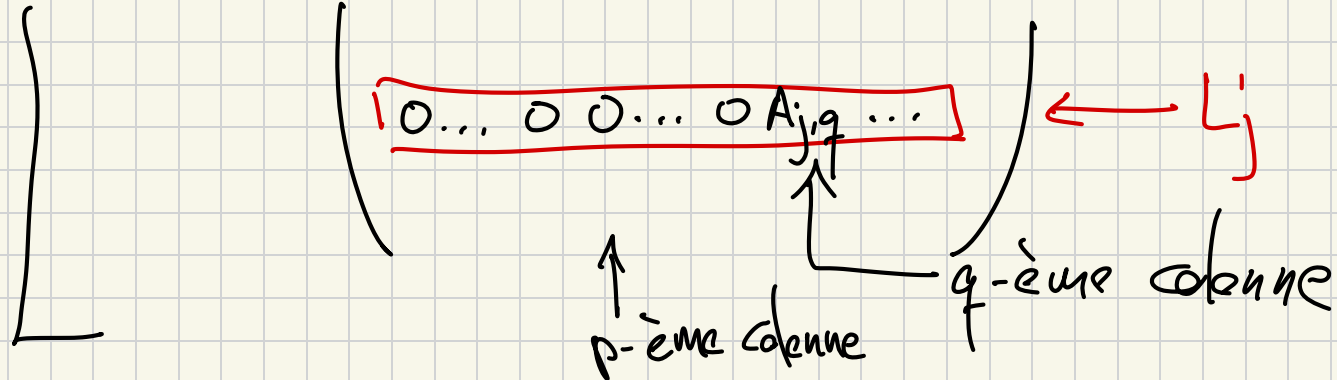
On dit que  $A$  est de taille  $\underline{m \times n}$ , en plus

$$M_{m \times n}(\mathbb{R}) := \left\{ \begin{array}{l} \text{toutes les matrices de taille } m \times n \\ \text{et coefficients dans } \mathbb{R} \end{array} \right\}$$

Le coefficient principal de la  $i$ -ème ligne  $A$  est, si y en a, le premier  $A_{ij}$  non nul en partant de la gauche.

On dit que  $A$  est sous forme échelonnée





### Exemple

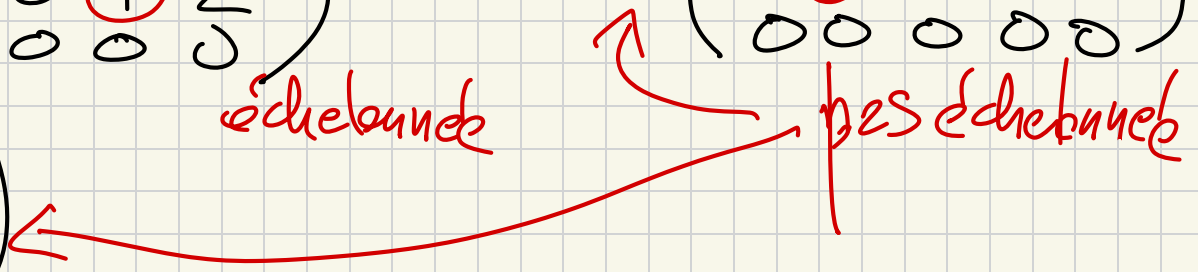
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

échange

pas échange



**Def 1.28** Une matrice  $A$  comme ci-dessus est échelonnée réduite si elle est échelonnée et

- (ECH,3) tous les coeff. principaux valent 1;
- (ECH,4) Si la  $k$ -ème colonne de  $A$  (ou vecteur  $C_k$ ) inclut le coeff. principal de la  $i$ -ème ligne  $L_i$  de  $A$ , les autres coefficients de  $C_k$  sont zéro.

On appelle pivot à tout coefficient principal d'une ligne non nulle d'une matrice échelonnée réduite.

THM 1.31 | Toute matrice de taille  $m \times n$  est ligne-équivalente à une matrice échelonnée réduite et à une seule.

↑ Forme échelonnée réduite de A (FER)

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 5 \\ 3 & 4 & 0 & 4 \\ 4 & 5 & -1 & 9 \end{pmatrix}$$

Calculer la FER

Utilisez des OEL sur  $A$  pour arriver à une

matrice échelonnée réduite

$$L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1$$

→

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & -11 \\ 4 & 5 & -1 & 9 \end{pmatrix}$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1 \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & -11 \\ 0 & 1 & 3 & -11 \end{pmatrix}$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - L_2$$

→

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$L_1 \leftarrow L_1 - L_2$$

→

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 16 \\ 0 & 1 & 3 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

FER de A

Méthode de Gauss-Jordan

① Choisir une ligne avec le coeff principal le plus à gauche possible et diviser la ligne par lui et mettre cette ligne en première;

② Pour les autres lignes vas faire  $L_i \leftarrow L_i - A_{i,1}L_1$   
(= vas faire  $L_i - L_1 \times$  coeff principal de  $L_i$ )

③ On répète les étapes précédentes en oubliant le coeff principal de la 1ère ligne

...

# Pourquoi calculer la FIE?

↳ Elle donne toutes les solutions du SFL associé.

## Exemple (suite)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 5 \\ 3x_1 + 4x_2 = 4 \\ 4x_1 + 5x_2 - x_3 = 9 \end{cases} \iff$$

↑ SFL équiv

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & | & 5 \\ 3 & 4 & 0 & | & 4 \\ 4 & 5 & -1 & | & 9 \end{pmatrix}$$

↑  
ligne équiv

$$\begin{cases} x_1 - 4x_3 = 16 \\ x_2 + 3x_3 = -11 \\ 0 = 0 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & | & 16 \\ 0 & 1 & 3 & | & -11 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \downarrow \text{FER} \\ \\ \end{matrix}$$

• Pour chaque colonne avec un pivot de la FER  $\rightarrow$  variable liée

(ex: 1<sup>ère</sup> colonne et 2<sup>ème</sup> colonne  $\Rightarrow x_1, x_2$  var. liées)

• Pour les autres colonnes  $\rightarrow$  var. libres

(ex: 3<sup>ème</sup>  $\rightarrow x_3$  var. libre)

On écrit les var. liées en fonction des var. libres

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 16 + 4x_3 \\ x_2 = -11 - 3x_3 \end{cases}$$

Les solutions de (\*)  
sont

$$S_{(*)} = \left\{ \left( \underbrace{16 + 4x_3}_{x_1 \text{ var. liée}}, \underbrace{-11 - 3x_3}_{x_2}, \underbrace{x_3}_{\text{var libre}} \right) : x_3 \in \mathbb{K} \right\}$$