Dans cette séance on va voir

(1) déf. de matrice et de matrice augmentée associée à un SEL

(2) déf de coeff. principal d'une ligne d'un SEL

(3) déf de matrice échelonné et de matrice échelonnée réduite ;

(4) déf d'OEL pour une matrice / matrice augmentée et matrices ligne-équivalentes (ou équivalentes)

(5) méthode de Gauss-Jordan

Déf. 1.18 É.d. un SEL

$$(*)\quad \begin{cases} a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ \vdots \qquad\qquad \ddots \qquad\qquad \vdots \\ a_{m,1}x_1 + \dots + a_{m,n}x_m = b_m \end{cases}$$

on définit

(1) matrice associée à (*) :

→ tableau rectangulaire

$$\begin{array}{c} m \text{ lignes} = \#\text{éq.} \end{array} \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix}}_{n \text{ colonnes} = \#\text{variables}} \right. \leftarrow \text{coeff. de } (*)$$

(2) matrice augmentée associée à (*) :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & \dots & a_{m,n} & b_m \end{array}\right)$$

second membre

Pourquoi ? → Pour écrire moins !!

SEL = matrice augmentée

(i.e. les SEL et les matrices augmentées ont la même information)

Déf. 1.13* (pour matrices augmentées ou non augmentées)

Toutes les déf d'OEL pour les SEL s'appliquent aussi à des matrices (augmentées). De même, deux matrices (augmentées) sont dites **ligne-équivalentes** (parfois, seulement équivalentes) si l'on peut obtenir une à partir d'une suite finie d'OEL sur l'autre.

Exemple 1.17 (suite) Le SEL donné a la matrice augmentée :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & 4 & 1 \\ 6 & 12 & 6 & 0 \\ -2 & -2 & -7 & 5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_2 \leftarrow \frac{1}{6} \cdot L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & -7 & 5 \end{array}\right) \underbrace{\longrightarrow \cdots \longrightarrow}_{\text{OEL}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 27/3 \\ 0 & 1 & 0 & -10/3 \\ 0 & 0 & 1 & -7/3 \end{array}\right)$$

Déf 1.20 Si $A = \underbrace{\begin{pmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m,1} & \cdots & A_{m,n} \end{pmatrix}}_{n \text{ colonnes}} \Big\} m \text{ lignes}$

(on dit que A est de <u>taille</u> <u>$m \times n$</u>, en plus

$$\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R}) := \{\text{toutes les matrices de taille } m \times n \text{ et coefficients dans } \mathbb{R}\})$$

Le <u>coefficient principal</u> de la i-ème ligne A est, s'il y en a, le premier $A_{i,j}$ non nul en partant de la gauche.

On dit que A est sous **forme échelonnée** (ou simplement "A est échelonnée") si

(ECH.1) Toute ligne en dessous d'une ligne nulle est nulle

(ligne nulle = $0 \ldots 0$)

(ECH.2) Si L_i et L_j sont deux lignes de A avec $i<j$; $A_{i,p}$ est le coeff. principal de L_i, $A_{j,q}$ est le coeff principal de L_j, alors $p < q$.

i-ème ligne

j-ème ligne

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{0 \ldots 0 \; A_{i,p} \quad \ldots} \end{pmatrix} \leftarrow L_i$$

$$\begin{pmatrix} & & & & & \\ 0 \dots & 0 & 0 \dots & 0 & A_{j,q} & \dots \\ & & & & & \end{pmatrix} \leftarrow L_j$$

p-ème colonne

q-ème colonne

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

échelonnée

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

pas échelonnée

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Déf 1.28 Une matrice A comme ci-dessus est <u>échelonnée réduite</u> si elle est échelonnée et

(ECH.3) tous les coeff. principaux valent 1;

(ECH.4) si la k-ème colonne de A (on notera C_k) inclut le coeff. principal de la i-ème ligne L_i de A, les autres coefficients de C_k sont zéro.

On appelle <u>pivot</u> à tout coefficient principal d'une ligne non nulle d'une matrice échelonnée réduite.

THM 1.31 Toute matrice de taille $m \times n$ est ligne-équivalente à une matrice échelonnée réduite et à une seule.

← Forme échelonnée réduite de A (FER)

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 5 \\ 3 & 4 & 0 & 4 \\ 4 & 5 & -1 & 9 \end{pmatrix}$$

Calculer la FER → Utilisez des OEL sur A pour arriver à une matrice échelonnée réduite

$$\xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1} \begin{pmatrix}1&1&-1&5\\0&1&3&-11\\4&5&-1&9\end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1} \begin{pmatrix}1&1&-1&5\\0&1&3&-11\\0&1&3&-11\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - L_2} \begin{pmatrix}1&1&-1&5\\0&1&3&-11\\0&0&0&0\end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 - L_2} \underbrace{\begin{pmatrix}1&0&-4&16\\0&1&3&-11\\0&0&0&0\end{pmatrix}}_{\text{FER de A}}$$

$\boxed{\text{Méthode de Gauss-Jordan}}$

1. Choisir une ligne avec le coeff principal le plus à gauche possible et diviser la ligne par lui et mettre cette ligne en première.

2. Pour les autres lignes vous faites $L_i \leftarrow L_i - A_{i,1} L_1$
(= vous faites $L_i - L_1 \times$ coeff principal de L_i)

3. On repète les étapes précédentes en oubliant le coeff principal de la 1ère ligne

. . .

Pourquoi calculer la FER ?

→ Elle donne toutes les solutions du SEL associé.

Exemple (suite)

SEL

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 5 \\ 3x_1 + 4x_2 \quad = 4 \\ 4x_1 + 5x_2 - x_3 = 9 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 5 \\ 3 & 4 & 0 & 4 \\ 4 & 5 & -1 & 9 \end{array}\right)$$

SEL équiv

ligne équiv

$$\begin{cases} x_1 \qquad - 4x_3 = 16 \\ x_2 + 3x_3 = -11 \\ \qquad 0 = 0 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & \vdots & 16 \\ 0 & 1 & 3 & \vdots & -11 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix}$$

FER

1ère — 2ème

- Pour chaque colonne avec un pivot de la FER → variable liée
(ex : 1ère colonne et 2ème colonne ⟹ x_1, x_2 var. liées)
- Pour les autres colonnes ⟹ var. libres
(ex : 3ème ⟹ x_3 var libre)

$\boxed{\text{On écrit les var. liées en fonction des var. libres}}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 16 + 4x_3 \\ x_2 = -11 - 3x_3 \end{cases}$$

Les solutions de $(*)$ sont

$$S_{(*)} = \Big\{ \big(\underbrace{16 + 4x_3}_{x_1}, \underbrace{-11 - 3x_3}_{x_2}, \underbrace{x_3}_{\text{var libre}} \big) : x_3 \in \mathbb{R} \Big\}$$

var. liées